제4강: 미적분학과 상태공간

◆1교시: 리만의 수학적 차원에 근거한 들뢰즈의 다양체 개념

▲수학적 '차원'에 대하여

-책 낭독-

여기서 이제 주목할 것이 뭐냐면, 좌표계를 사용하는 방법은 항상 주어진 대상보다 n+1, 한 차원 위의 것을 써야합니다. 이 선을 연구하려면 2차원 좌표가 필요하고. 면을 연구하려면 3차원이 필요하잖아요. 항상 n+1차원입니다. 그게 포인트이고.

-책 낭독-

어떤 곡선이 있으면 3차원 좌표가 있고, 그 모든 점들은 각각 3차원 좌표 내에서 x, y, z값을 부여받겠지요.

-책 낭독-

아까 거리 이야기한 적 있죠? 이해하기 쉽게 하기 위해서 2차원을 예로 들면, 하나의 직선을 대수학으로 표현하면 거리는 한 점에서 다른 점의 좌표 값을 뺀 것이겠죠. 그것을 뺀 다음에 피타고라스의 정리. 직각삼각형의 빗변을 a라고 한다면 a제곱은 $(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$에 루트 씌운 거, 이렇게 구하죠.

이것을 한 차원 높여서 생각해봐요. 한 표면에 3차원의 좌표 값을 이용해서 구하면 되겠죠. 그러나 가우스는, 이것이 아주 사상사에서 중요한 문턱 중의 하나예요. 공간을 사유하는데.

-책 낭독-

무한 소-점들에 초점을 맞춘다는 말은 무슨 뜻이냐면, 어떠한 곡면에서 여기서 여기까지의 정태적인 방식이 아니라, 아까 말했던 infinitesimal, 예컨대 이 점에 가까이 간다라든가 퍼져간다든가, infinitesimal을 연구한다는 거죠.

거기에 초점을 맞추되 전적으로 국소적인, local한 정보를 가지고 작업을 하되. 이 local한 작업이 상당히 중요하죠. 곡면이 어디서 휘어지느냐를 따지려면 기울기가 0이 되는 점을 찾아야 되겠지. 이게 'singular point'거든요. '특이점'들인데 이걸 찾아야 되겠지. 어떤 점을 잡아서 성격을 파악하는 거죠. 휘어지나, 안 휘어지나. 이것을 잡으면 기울기의 +, -가 옮겨가잖아요. 이런 것을 추적하는 거야. 이런 것을 잡아내면 공간의 전체 윤곽이 드러나겠죠.

▲좌표로부터 자유로워진 수학의 공간

www.artnstudy.com

-책 낭독-

이게 아주 중요한 대목입니다. 무슨 이야기냐 하면 곡면을 연구할 적에 3차원 좌표를 세운 뒤에 연구할 필요가 없다는 거예요. 좌표를 빼버리자는 거죠. 마치 공간 안에 있으면서 공간을 파악하는 것처럼 이야기할 수 있다는 거지.

어떤 입장이 되냐면, 쉽게 말하면 3차원을, meta차원을 놓고서 이야기하는 방식은 우리가 우주선을 타고 지구 밖에 가서 지구를 바라보는 방식이에요. 여기 지구가 있으면 우리가 우주선을 타고 밖에 나가서 이것을 바라보는 방식이 좌표를 이용하는 방식이죠. 그런데 이 방식은 좌표를 빼버리고 우리가 공간 안에 있으면서 모양을 파악하는 거죠.

옛날 사람들은 지구가 평평하다고 봤죠. 한참 가도 끝이 안 나오니까. 만일 그때 사람들이 지구 밖에 나가서 봤다면 둥글다는 것을 당연히 알았겠지. 그런데 그렇게 안 나가더라도 여기에 immanent하게 있으면서도 공간을 파악할 수 있다는 거야. 그게 상당히 중요한 포인트입니다. 그 변화율을 측정함으로써.

-책 낭독-

무슨 이야기냐 하면, 옛날에는 대상이 있고, 표면이 있고, 이 표면 바깥에 메타적인 축이 있었는데, 이 표면 자체가 좌표축이 되는 거예요. 이 자체가 이 안에서.

-책 낭독-

어떤 공간 안에 구가 있는 것이 아니라 구 자체가 공간이 되는 거죠. 그 구에서 직선은 뭘까. 예컨대 구의 표면에서 직선이라는 것은? 자오선같이 원주의 큰 원을 가로지르는 그것이 직선이 되겠죠. 메타차원에서 바라보면 그것은 하나의 원이죠.

예컨대 둥근 표면에서, 구입니다. 구인데 구의 표면에서 직선의 규정이 뭐예요? 구 점 사이의 최단거리죠. 예컨대, 이것이 직선이라면, 이렇게 휘는 것이 직선이죠. 우리가 생각하는 직선은 여기서 존재하지 않죠. 밖에서 바라보면 이것은 곡선이죠. 그러나 이 안의 내재적으로 보면 이 곡선이 직선인거죠. 그게 최단거리니까. 사고방식이 엄청나게 흔들릴 거예요. 여기서 굉장히.

-책 낭독-

▲다양한 차원의 공간개념을 창안한 수학자, '리만 (Georg Friedrich Bernhard Riemann)'

이 사람이 소개해준 책이 있죠. Lawrence Sklar의 『Space, time and space-time』이 책이 참 좋더라고. 내가 이걸 샀는데, 앞에 조금 읽어보고 있는데 상당히 괜찮은 책인 거 같

www.artnstudy.com

리만

아요. 기하학의 인식론, 앞의 그 역사를 정리를 해주고 있고. 한번 읽어 볼만한 책입니다.

-책 낭독-

리만은 좀 더 일반적인 문제의 해결로 성공적으로 나아갔다. 만약에 1차원이 되고, 2차원이 되고, 3차원이 된다면 4,5차원이 안될 게 뭐있느냐는 거죠. 기하학적 표상은 안 되죠. 4차원이 되면 그림을 그릴 수가 없잖아요. 머릿속으로 상상이 잘 안되죠.

그것을 만약에 아까 말한 식으로 하면 얼마든 가능하죠. 10차원은 숫자 10개로 하면 될 거 아니에요. 3차원은 x, y, z였으니까. 4차원은 x_1, x_2, x_3, x_4로 하면 될 것이요. 어떤 사람들은 4차원을 시간을 넣어서 보는 사람들이 있죠. 6차원, 7차원 다 가능하죠. 기하학적 표상은 안 되지만 대상으로는 얼마든지 다룰 수 있으니까. 그래서 나온 유용한 개념이 n차원 다양체. n-dimensional manifold.

-책 낭독-
이 단어가 중요한 단어입니다. variable number of dimension. 가변적인 차원 수. 차원 수가 6,7,8 내려가거나. 아주 abstract한 추상공간으로 데려갔다. 이 리만기하학 이후의 수학사가 참 흥미로워요. 재미있는 것이, 여담이지만, 사람을 보면 구체적인 것을 좋아하는 사람이 있고, 드물지만 추상적인 사람이 있죠.

내가 대학교 다닐 때에도 물리학을 선호하는 사람이 있고, 화학을 더 선호하는 사람이 있어요. 가끔 둘이서 갑론을박 싸워요. 물리학을 선호하는 사람은 계속 abstract한 차원으로 끌고 가요. 화학 하는 사람들은 이것이 뭐가 우리에게 감각으로 나타나야 하죠. 예를 들어, 물리학적으로는 차이가 없는 것이 단지 뭐 파장의 크기의 차이에 불과하고, 입자 사이에 차이인 것이 화학자에게는 엄연한 차이인 거죠. difference.

H_2O와 HO는 단지 물리학적으로는 물리학적 차이밖에 없는 거야. 입자들 간의 배열과 거리와, 전자의 궤도의 차이지 질적 아이는 별로 포인트를 안 두거든. 화학자에게는 이 둘은 엄연히 다른 거죠. 전혀 다른 거죠. 사람들을 유심히 보면 대게 질적이고 구체적인 것을 좋아하는데 abstract좋아하는 사람이 있어요.

옆에서 싸우는 것을 몇 번 봤는데, 화학이 물리학으로 환원된다고 믿는 사람도 있고, 전적으로 다르다고 보는 사람도 있는데. 이 리만기하학 이후의 수학으로 가면 정말 abstract한 것이죠.

-책 낭독-

▲리만의 수학적 공간에서 들뢰즈의 다양체로

www.artnstudy.com

보통 베르그송을 비롯해서 일부 극소수지만 철학자들이 리만에 관심이 되게 많아요. 왜 수학자 중에서 리만에게 유독 관심이 많으냐고 하면, 리만이 개념을 다 바꿔버렸거든요. 수학 공식이 아니라 공간이 뭐냐, 직선이 뭐냐 이런 개념자체를 아예 바꿔버린 거예요. 그래서 베르그송, 들뢰즈를 비롯한 일부 철학자들이 리만에게 특히 관심이 많아요.

-책 낭독-

푸앵카레가 이 이야기를 하죠. 푸앵카레가 리만기하학을 우주에 적용할 수 있다고 하는데 역시 우주는 유클리드적으로 되어있다고 했거든요. 아인슈타인이 리만기하학을 써서 공간을 표시하죠.

-책 낭독-

우리가 들뢰즈를 읽으면 dimension이라는 말이 자주 나오거든요. 차원이라는 말이. 그런데 이따 이야기하겠지만 들뢰즈가 말하는 dimension은 순수 수학적 dimension을 이야기하는 것이 아니라 질적인 차이들의 수를 이야기하는 거예요.

예를 들어서 어떤 계system이 열이 있고 색깔이 있고 모양이 있고, 이러면 들뢰즈에게는 3인 거죠. 거기에 움직임까지 넣어야 한다면 dimension은 4가 되는 거고. 거기에 마음을 넣어야한다면 dimension은 5가 되는 거고. 거기에 사회성을 넣어야한다면 dimension은 6이 되는 거죠. 이런 거죠 들뢰즈에게는. qualitative한 거죠. 나중에 나오겠지만.

-책 낭독-

이게 들뢰즈 철학의 아주 중요한 내용입니다. 어떤 다자(多者)가 있으면, 물론 이 이야기가 논해지는 맥락이 여러 가지인데 가장 알기 쉽고 간단한 예를 들면, 다자들이 있으면, 이 다자들로부터 meta적인 차원의 틀이 주어지면, 그 틀에 맞춰서 다자가 정리되는 거죠.

그게 들뢰즈 용어로 하면 뭐야? 이 물질차원의 영토화죠. territorialization. 영토화. 이 메타차원 자체 이것으로 말하면 코드화. codage. 무슨 말인지 알겠어요? 그런데 만약 이런 것들을 초월적으로 규정하면, 다 걷어버린다던지, 다 걷어버리면 어떻게 되겠어요? 문제는 이것들의 자체 관계만의 문제가 되어버리겠죠.

그런데 나중에 자주 나오겠지만, 들뢰즈는 이런 것들을 machine이라고 부르죠. machine의 핵심 포인트는 desire이거든요. 욕망. 욕망이라는 개념은 심리적인 개념이 아니라 존재론적인 개념이에요. potentia, 역능(力能). 역능인데, 자기 역능에 따라서 움직이겠죠. 움직이면 이 움직임이라는 것은 이것들의 관계, 특히 힘, 관계에 따라 변해가는 것이라는 거죠.

meta차원이 어차피 없으니까. 이것이 rhizomatic한 거예요. 지금 설명은 너무 거친 설명인데, 일단 이 맥락에서는. 이 n+1차원이라는 것이 빠진다는 게 굉장히 중요한 거예요. 초월

www.artnstudy.com

적 레벨에서 정돈해주고 있는 축이 싹 빠진다는 거예요. 빠지고, 모든 사물이 자체 안에 품고 있는 역능에 따라서 내재적으로 관계되어서 움직인다는 거죠.

-책 낭독-

촛불시위에 나가는 사람이 일정 모델이 있어서 그것을 보고 맞춰나가는 것이 아니라는 거죠. 그 사람들은 각자 가지고 있는 주체성과 욕망에 의해 움직인다는 거죠. 그런데 그것이 어떤 계를 형성한다는 거죠. 그 줄에 보면 『차이와 반복』이 인용되어있는데,

-책 낭독-

들뢰즈에게는 라인이라는 것이 굉장히 중요해요. 들뢰즈는 도식적으로 말하면, point의 사유도 아니고, 입체의 사유도 아니고 line의 사유죠. line을 형상화하는 거죠.

-책 낭독-

www.artnstudy.com

◆2교시: 가능성의 공간과 상태공간

▲ 수학적으로 사물을 파악 - 가능한 상태들의 공간

가우스, 리만기하학이 나오면서 meta차원, 좌표계가 있고 그 안에 대상을 심는데, 그 좌표계를 빼고 도형 그 자체가 공간이 되는 것에 관한 이야기를 했죠. 이것도 상당히 중요하고. 12쪽을 봅시다.

-책 낭독-

그러니까 다양체의 기하학적 성질이 있고, 형태 발생적 과정을 정의하는 성질이 있고. 어떤 물리적 과정, physical process가 있고 geometrical quality가 있는데 어떤 밀접한 관계를 맺고 있다는 거죠. 이게 플라톤에서 근원하는, 우리가 감각적으로 경험하는 현실을 초감각적인 공간속에 집어넣어서 탐구하는, 플라톤 이래의 서양 논리철학이 갖고 있는 방식인데.

-책 낭독-

'가능한 상태들의 공간'이라는 이 개념이 상당히 중요한 것인데. 어떤 시스템이 있으면 우리가 그 시스템에서 현실적으로 경험하는 게 있고, 아직 경험 안 한 잠재성, 그 시스템이 현실로 나타나고 있지는 않지만 나타날 수 있는 virtuality를 파악하는 게 상당히 중요한데, 그것이 가능한 상태들의 공간이죠. 그게 꼭 actual한 게 아니더라도 공간이 된다. 각주가 있는데 그것은 아직은 안 하는 게 좋고, 나중에 돌아와서 하는 게 좋으니까 접어두세요.

-책 낭독-

▲자유도(degree of freedom)의 개념

자유도는 degree of freedom이죠. 자유도. 이것을 순수 기하학적으로 설명하면. 만약 외줄이 하나 있는데 개미가 한 마리 외줄을 기어가면, 개미에게는 앞으로 가느냐, 뒤로 가느냐 하는 라인의 길이, 더 나아가면 라인의 길이는 결과고 개미의 속도만이 있죠. 그 외에는 아무것도 없죠. 이렇게 되면 degree of freedom이 1입니다.

그런데 개미가 면 위에 있으면 한 선으로 갈 필요가 없고 여러 방향으로 갈 수 있죠. 이렇게 되면 degree of freedom이 2가 되죠. 이 degree of freedom이라는 개념은 dimension이라는 개념과 통합니다.

그런데 이 degree of freedom을 질적인 방식으로 파악을 할 수가 있는데, 예컨대 어떤 주전자가 있다고 하면, 불에 끓고 있고, 주전자는 압력(pressure), 부피(volume), 온도(temperature) 이 3가지의 자유도를 가질 수 있죠. 물론 생각하기에 따라서 다른 것도 생각할 수 있는데. 압력이 얼마냐, 부피가 얼마냐, 온도가 얼마냐를 따질 수가 있지요.

www.artnstudy.com

예컨대 종이에다 색을 칠할 때, 다섯 개의 색을 이용하면 자유도가 5인 거죠. 색이 4개면 4고. 그게 자유도라는 말의 의미이고, dimension이라고도 부르는데. 그 대상을 변할 수 있게 해주는 관련방식의 수(數).

저 계가 어떤 식으로 변할 수 있겠느냐 하는 것. 만약 저 주전자에게 온도밖에 없다면 온도의 변화 외에는 딴 변화가 없고, 그것이 degree of freedom인데, 그것을 잡아내고, 둘째는 미분방정식을 이용해서 그러한 변화들을 서로 관련시키는 것이다.

그러니까 평면위의 개미는 degree of freedom이 2입니다. 자유도가 2. 수평방향으로 변화를 x라 하고, 수직방향의 변화를 y라고 하면 나머지는 이것들의 조합이니까. 수평방향의 변화는 dx이고, 수직방향의 변화는 dy가 되겠죠.

만일 이 놈이 한 점에서 다른 점으로 이동하면, y=2x라는 함수관계에 따라서 움직이는 거죠. x보다 y가 두 배씩 되니까. 만일에 이렇게 완만해지면 1/2x가 되겠죠. 이것을 좀 더 정확히 쓰면 dy=2dx가 되겠죠. y의 변화는 x의 변화의 두 배인 거죠. 그런데 이놈을 앞으로 옮기면 dy/dx=2가 되겠죠. 이게 미분방정식이지. 제일 간단한 미분방정식. 이 이야기입니다. 첫째로는 자유도를 찾아내고 둘째로는 각각을 미분방정식으로 표현하는 것.

-책 낭독-

물론 이것은 편의상이죠. 베르그송 식으로 생각하면 어떤 사물이든 그 안에 무한히 복잡한 질을 가지고 있는 것이고. 과학적으로 탐구하려면 어떻든 잘라낼 것은 잘라내야죠. 잘라내고, degree of freedom을 찾아내고.

진자 같은 경우 그 진자가 어디에 있느냐, 그 진자의 운동량이 얼마이냐. 자유도가 2죠. 물론 온도까지 고려하면 3이 되는 거고. 온도가 높아지면 진자가 녹을 수도 있는 거고. 다이너마이트 같은 것도 있고. 얼마든지 생각해볼 수 있죠. 그러나 아주 추상적으로, 정말 추상적으로 그것만 보면 자유도는 2죠.

▲'자유도'와 '가능성의 공간'을 사물에 적용한다면?

그러니까 진자라고 하는 동력학적 계, dynamical system을 특징짓기 위해서는 거리와 예컨대, 이것이 진자라고 하면, 이것을 놓으면 움직이겠죠. 이 거리와 momentum운동, 곡선 궤적의 거리를 표현하는 것은 어렵죠. 그래서 훨씬 간단하게 진자의 각도인 세타로 표현하면 되죠. 보통 세타로 하죠. 거리보다. 그 다음에 momentum 보다는 더 편하게 속도 velocity. 각각의 속도. 보통 이렇게 표현하죠.

-책 낭독-

www.artnstudy.com

이렇게 dynamical한 system을 파악하는 방식이죠.

다음으로 각각의 자유도를 수학적 다양체의 각 차원들에 사상(寫像)한다. 사상이라는 것은 어떤 한 계를 다른 한 계로 그림자처럼 투여하는 거예요. 예를 들어서 여기 수학적 공간, 다양체 공간이 있고 여기에 사물들이 있다면, 볼펜은 x, 종이는 y, 컵은 z 이렇게 대응시키는 거예요. 이것을 맵핑(mapping)한다고 해요. 수학 자체 내에서도 맵핑을 할 수 있고. 여기서는 현실세계를 수학세계로 맵핑하는 거죠.

그래서 진자라는 가능성의 공간, 이것의 space of possibility지. 이것이 가능할 수 있는. 예컨대 진자가 특별한 이유가 없는데 색깔이 바뀐다거나 이런 것은 가능하지 않잖아요. 물론 어떤 경우에는 가능하겠지만, 통상적인 경우.

진자가 둥글었는데 갑자기 네모로 변한다거나. 그것은 거의 상상하기 힘들죠. 진자가 힘을 일정하게 놓았는데 갑자기 높이 올라간다거나. 아주 세게 던진다면 몰라도. 그런 것은 이해하기 어려운 거죠. 아무리 많이 가도 -놓았다면- 세타만큼 가죠. 놓았는데, 에너지 변화가 없는데, 그럼 이동량이 점점 줄 것 아니에요? 줄어들다가 갑자기 솟구친다거나. 그런 건 아니라는 거죠.

이것이 말 그대로 degree of freedom이라는 거죠. 이것을 더 넓혀 말하면 space of possibility. 진자에게 가능성의 공간인 거죠. 들뢰즈가 말하는 virtuality. 가능성의 공간이죠. 가능성의 공간은 2차원의 면을 필요로 한다. 이 물리세계를 수학세계로 투영한 겁니다.

▲상태공간(state space)의 개념

저 물리세계를 수학세계로 투영하면 이 수학세계에 몇 개의 변수가 필요해요? 두 개지. 두 개. 세타라는 변수와 속도라는 변수. 두 개 밖에 필요 없죠. 이것이 2차원 다양체지. 여기서의 한 점은 뭡니까. 여기 좌표의 한 포인트는 뭐죠? 이 기하학적 공간에서 하나의 포인트는 이 물리세계의 한 상황이죠. 세타가 어느 정도이고, 속도가 이렇게 되는 수학적 점 하나는 물리세계에서, 이 계의 어떤 상태, 상황인 거죠.

-책 낭독-

앞의 자전거와 같은 경우는 10차원이죠. 10 dimension은 그릴 수가 없죠. 3차원만 되어도 복잡한데. 3차원만 되어도 제 실력으론 못 그려요. 4,5차원 같은 경우는 그림이라는 것을 완전히 초월해버리는 것. 굉장히 abstract한 세계.

-책 낭독-

수학적 다양체를 상태 공간, state space라고 해요. 어떤 경우에는 phase space라고 합니다. 곡면곡간, 번역한다면. 이것의 phase를 그리는 거니까.

www.artnstudy.com

▲진자의 반복운동과 그 상태공간

-책 낭독-

이 점이 하나 있는데, 예컨대. 점이 두 개가 있어요. 하나는 이 점, 하나는 이 점. 이것도 저 계의 한 상태이고 나머지도 계의 상태이죠. 한 점에서 다른 점으로 옮겨갔다는 것은 무슨 이야기예요? 이것은 상태가 변해서 세타가 줄고 속도는 늘어난 거죠. 여기서의 하나의 점은 저 계의 한 시점의 상태이고, 여기서의 선은 진자가 변해가는 전체를 가리키는 거죠.

실제로 그려볼까요? 세타가 최대 각이 되어서 0이라고 칩시다. 진자를 놓았습니다. 죽 가죠. 세타는 줄어들죠. 속도는 늘어나죠. 진자의 최저점에서 maximum이 되겠지. 그래프는 이렇게 될 겁니다. 세타가 줄면 속도는 늘어나서. 그래프의 최고점은 진자가 가장 아래에 왔을 때. 이후부터는 세타가 반대방향으로 늘죠. 늘어난다는 것은 좌표 음의 방향으로 늘어난다는 것이고, 속도는 점점 줄어들면서 최고점에서 잠깐 서겠죠. 그게 좌표계에서는 여기지. 세타가 최고가 되었을 때 속도는 제로지. 그리고 진자가 오겠죠. 세타는 줄겠죠. 줄면서 속도는 다시 늘어나겠지. 그리고 저쪽으로 가면 세타는 다시 늘고 속도는 줄겠죠. 이렇게 타원을 그려요. 그리고 이 과정에서 소모된 전체 에너지는 그래프의 면적입니다.

실제로는 어떻게 되느냐면, 이것처럼 안 되고, 가서 돌아오면 처음 지점가지 올까요? 조금 덜 오겠죠. 조금 마찰이 있으니까. 조금씩 더 덜 와서 멈추겠지. 그럼 좌표에서는 이렇게 되는 거지. 또 가면, 또 덜 오고, 또 덜 오고, 그래서 세타와 속도가 0이 되겠지요. 실제로 이렇게 되요. 그래서 이 dynamical system(동력학계)을 분석하는 게 주로 저렇게 분석해요. 저것은 아주 심플한 경우인데 복잡한 것은 아주 복잡하죠.

www.artnstudy.com